

Фукалов Антон Александрович

**Краевые задачи о равновесии
анизотропных центрально-симметричных тел
и их приложения**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» на кафедре механики композиционных материалов и конструкций

Научный руководитель: Соколкин Юрий Викторович,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Митюшов Евгений Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры теоретической механики ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Радченко Владимир Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет»

Защита состоится «___» _____ 2016 года в _____ на заседании диссертационного совета Д004.012.01 при Институте механики сплошных сред УРО РАН по адресу: 614000, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, ауд. 423б.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики сплошных сред УрО РАН и на сайте <http://icmm.ru>.

Автореферат разослан « » _____ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук

Березин Игорь Константинович

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях аэрокосмического и нефте-газо-химического комплексов находят применение элементы конструкций и сооружений (монолитные крепи сферических горных выработок, контейнеры для длительного хранения и транспортировки высоко-агрессивных и реакционно-способных твердых и жидких сред, а также отдельные узлы авиационной и ракетно-космической техники) в виде массивных толстостенных сфер, изготавливаемых из анизотропных материалов, весом которых нельзя пренебречь. Наиболее распространенными видами нагрузки для этих тел являются равномерно и/или неравномерно распределенное статическое или изменяющееся во времени внешнее и/или внутреннее давление и собственный вес, а задачи определения напряженного и деформированного состояния, оптимального проектирования и оценки начальной прочности элементов конструкций и сооружений ответственного назначения являются **актуальными**.

Равновесие упругих изотропных сферических тел достаточно хорошо изучено. Этой проблеме посвящены пионерские работы Г. Ламе (впервые получено решение задачи о равновесии упругой изотропной сферы), а также статьи и монографии У. Томсона, О. Tedone, С. Somigliana, V. Cherruti, А. Лява, А. И. Лурье. Кроме того, решению задач для симметрично нагруженных упругих сфер посвящены работы Б.Г. Галеркина, Л.Н. Ломоноса, К.В. Соляник-Крассы, С. Weber, E. Sternberg, F. Rosental, G. Fichera и др. авторов. J. Larmour, R. Southwell, V.E. Sternberg, R.A. Enbancs, M. Sadowsky, Г.Н. Савин, М.Т. Алимжанов, А.Н. Спорыхин, А.И. Шашкин А.В. Кривоченко, А.С. Чеботарёв, Н.А. Стрельчук, Г.Л. Хесин, Ф.Ф. Губин, В.Г. Ефремов и др. исследователи занимались решением задач определения напряженного состояния в окрестности сферических полостей. Задачи о сферических включениях рассматривались в работах Дж. Эшелби, Z. Hashin, В.В. Rosen, Р. Кристенсена, Т. Mura, P.J. Withers, Р.В. Гольдштейна и К.Б. Устинова с соавторами, С.А. Лурье с соавторами и др.

Библиографический список работ, посвященных исследованию неупругого поведения изотропных тел сферической формы (в т.ч. и для приложения к задачам геомеханики) обширен. Несмотря на то, что большинство конструкционных материалов, используемых при изготовлении сооружений, не демонстрируют изотропию деформационных и прочностных свойств, подавляющее большинство авторов ограничиваются именно этим приближением. Вопросами равновесия анизотропных сфер занимались В. Saint-Venant, С.Г. Лехницкий, А.Х. Шармазанашвили, Г.Б. Колчин, Е.К. Ковалов, Dai Hong-Liang, Zheng Hong-Yan, Yang Lei и др. исследователи. Большое количество монографий и статей посвящены анализу поведения конструкций и сооруже-

ний, имеющих форму полых толстостенных сфер, при воздействии внешнего и/или внутреннего давления. Проблема влияния массовых сил на напряженно-деформированное состояние сферических тел, рассматривалась в ограниченном числе работ Л.Л. Кожевниковой, Г.Б. Кузнецова, В.П. Матвеевко, И.Н. Шардакова, А.А. Рогового и их соавторов и только для тел, изготовленных из изотропных материалов.

Массивные конструкции не создаются мгновенно, поэтому для них важно учитывать постепенное нарастание массы в процессе производства. Задачи для растущих тел решаются в приближении малых и конечных деформаций в работах академика Н.Х. Арутюняна, профессора А.В. Манжирова и их учеников в предположении, что изотропные материалы, из которых изготовлены эти тела, являются упругими или вязкоупругими стареющими. В диссертационной работе предполагается, что элементы конструкций и сооружений в виде полых и составных толстостенных упругих сфер уже созданы (процесс производства не рассматривается), находятся в равновесии под действием гравитационных сил и демонстрируют при заданных центрально- и осесимметричных нагрузках бесконечно малые изменения объема и формы.

В отечественной и зарубежной литературе отсутствуют монографии и статьи, посвященные задачам исследования равновесия полых и составных анизотропных толстостенных сферических тел, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления в поле гравитационных сил, что подтверждает **научную новизну** диссертационной работы. Актуальность обозначенной проблемы предопределяет необходимость получения новых точных аналитических решений краевых задач для упругих анизотропных центральносимметричных тел, что и является **целью** работы.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

- получения новых точных аналитических решений краевых задач о равновесии составных толстостенных анизотропных центрально-симметричных тел, находящихся под действием внешнего и внутреннего равномерных давлений и частных случаев этих решений для изотропных сфер;

- получения новых точных аналитических решений задач о равновесии полых и составных анизотропных сферических тел, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью соответственно, а также при условии не полного (только радиального) закрепления,

а также проиллюстрированы приложения полученных решений к **проблемам**:

- выявления закономерностей совместного влияния крепи и окружающего массива осадочных пород, а также, проведению оценки начальной прочности монолитной железобетонной крепи сферической подземной выработки по совокупности кри-

териев, учитывающих различные механизмы истощения несущей способности, характерные для анизотропных материалов;

- определения вклада массовых сил в распределение независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях трансверсально-изотропных сфер;
- определения закономерностей совместного деформирования внутренней и внешней частей составной сферы и определения влияния анизотропии на характер распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях;
- прогнозирования эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов, трансверсально-изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения в рамках полидисперсных моделей механики.

Положения, выносимые на защиту:

- новые точные аналитические решения краевых задач о равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сферических тел, находящихся под действием внешнего и внутреннего равномерных давлений;
- новые точные аналитические решения задач о равновесии полых и составных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью соответственно;
- новые точные аналитические решения задач о равновесии полых и составных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, при условии идеального скольжения без трения на внешней или внутренней поверхности соответственно;
- аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов, трансверсально-изотропная или изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения, полученные в рамках полидисперсных моделей;
- результаты уточненной многокритериальной оценки начальной прочности монолитной анизотропной крепи сферической горной выработки с учетом влияния окружающего массива осадочных пород.

Практическая значимость работы. Полученные аналитические решения могут быть использованы в качестве тестовых, при прочностном анализе конструкций и их элементов численными методами, а также могут быть полезны исследователям при отработке методик натурных экспериментов со сферическими телами. Полученные аналитические решения позволяют также эффективно решать проблемы определения

напряженного и деформированного состояния, оптимального проектирования и оценки начальной прочности конструкций и сооружений ответственного назначения (Например, железобетонные монолитные крепи сферических подземных выработок), которые принадлежат к числу актуальных в различных отраслях машиностроения, горном деле, строительной механике и других областях.

Теоретические результаты диссертационной работы были использованы при разработке рабочих программ по дисциплинам «Теория упругости анизотропных материалов» и «Механика многокомпонентных систем», читаемым в Пермском национальном исследовательском политехническом университете (ПНИПУ) студентам, обучающимся по направлению 150100.64 — Материаловедение и технология материалов (профиль бакалавриата: 04 — Конструирование и производство изделий из композиционных материалов), нашли отражение при формулировке заданий на исследовательские курсовые проекты и выпускные квалификационные работы.

Основные научные результаты диссертационной работы были получены в рамках исследований, проводимых на кафедре «Механика композиционных материалов и конструкций» ПНИПУ с участием автора в рамках задания №2014/152 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности (базовая часть госзадания Минобрнауки РФ, код проекта – 1911) и грантов Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ–Урал № 07–01-96056, № 11–01–96033, РФФИ № 11–01–00910).

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным использованием аппарата математической теории упругости, аналитических методов прогнозирования эффективных упругих модулей дисперсно-упрочненных композитов матричного типа, методов решения краевых задач математической физики и сравнением частных случаев полученных решений с известными результатами других авторов.

Апробация. Результаты представленные в диссертации докладывались и обсуждались на: XXXVI, XXXVIII и XXXIX Международных летних школах-конференциях «Актуальные проблемы механики» (Санкт-Петербург, 2008, 2010 и 2011); II Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Ереван, 2010); 8 Европейской конференции по механике твердого тела (Грац, 2012); XXXVI, XXXVII и XXXVIII Международных молодежных научных конференциях «Гагаринские чтения» (Москва, 2010–12); XVI–XIX Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2009, 2011, 2013 и 2015); Всероссийских научно-технических конференциях «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации» (Пермь, 2009, 2011 и 2013); Всероссийских школах-конференциях молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2008 – 12, 2015); VI Российской научно-технической конференции «Механика микронеоднород-

ных материалов и разрушение» (Екатеринбург, 2010); Всероссийской конференции посвященной 90-летию со дня рождения академика И. Ф. Образцова «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Москва, 2010); X и XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011 и Казань, 2015).

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедр ПНИПУ: «Механика композиционных материалов и конструкций» (рук. — зав. кафедрой, Заслуженный деятель науки РФ, д-р физ.-мат. наук, профессор Ю.В. Соколкин), «Математическое моделирование систем и процессов» (рук. — зав. кафедрой, Заслуженный деятель науки РФ, д-р физ.-мат. наук, профессор П.В. Трусков), Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН, д-р техн. наук, профессор В.П. Матвеев) и семинаре лаборатории «Механика прочности и разрушения материалов и конструкций» (руководитель - чл. корр. РАН Р.В. Гольдштейн) Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского + **Ведущая организация.**

Публикации. Научные результаты диссертационной работы опубликованы в 3 статьях в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ [1–3]; в ... статьях в материалах и тезисах докладов Всероссийских и международных конференций, основные из которых [...–...].

Личный вклад автора заключается в получении новых точных аналитических решений краевых задач о равновесии полых и составных толстостенных анизотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, выводе в рамках полидисперсных моделей аналитических выражений для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов с однородно распределенными трансверсально-изотропными сплошными или полыми сферическими включениями. Постановка задачи была сформулирована научным руководителем, с которым обсуждались все полученные новые научные результаты.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на ... страницах, содержит 14 рисунков, список литературы представлен 83 источниками.

Краткое содержание работы

Во **введении** представлен краткий обзор литературы, посвященной аналитическим решениям краевых задач механики деформируемого твердого тела для центрально симметричных тел, сделано заключение о научной новизне и актуальности темы,

сформулированы цель, задачи диссертационного исследования и новые научные результаты, приведено краткое описание содержания диссертации по главам.

В **первой главе** приведены основные уравнения теории упругости в ортогональной сферической системе координат ρ , θ , φ . Рассмотрено линейно-упругая «тяжелая» сфера (центр совпадает с началом системы координат), ограниченной поверхностями радиусами ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$), находящаяся в состоянии равновесия в поле гравитационных сил. Здесь и далее центрально симметричное тело, при математическом описании которого возникает необходимость учета массовых сил, будем называть «тяжелой» сферой. Считалось, что материал сферы однородный, с постоянной плотностью по всему объему, сферически трансверсально-изотропный относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра в данную точку. Так как на центрально-симметричное тело действует нагрузка симметричная относительно вертикальной оси, проходящей через его геометрический центр, то компоненты вектора перемещения, тензоров напряжений и деформаций не зависят от окружной координаты, удовлетворяют геометрическим соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \partial_\rho u_\rho, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = (\partial_\theta u_\theta + u_\rho)/\rho, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = (u_\theta \operatorname{ctg} \theta + u_\rho)/\rho, \quad \gamma_{\rho\theta} = \partial_\rho u_\theta + (\partial_\theta u_\rho - u_\theta)/\rho \quad (1)$$

и уравнениям равновесия:

$$\partial_\rho \sigma_{\rho\rho} + (\partial_\theta \tau_{\rho\theta} + 2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta)/\rho + F_\rho = 0, \quad (2)$$

$$\partial_\rho \tau_{\rho\theta} + [\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}]/\rho + F_\theta = 0.$$

Здесь $F_\rho = -\gamma \cos \theta$ и $F_\theta = \gamma \sin \theta$ — компоненты вектора массовых сил, γ — удельный вес материала и $\partial_x = \partial/\partial x$.

Определяющие соотношения:

$$\sigma_{\rho\rho} = A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \tau_{\rho\theta} = A_{44}\gamma_{\rho\theta}$$

для трансверсально-изотропного тела содержат коэффициенты: $A_{11} = \tilde{E}(1-\nu)/m$, $A_{12} = E\tilde{\nu}/m$, $A_{22} = E(1-\tilde{\nu}^2 E/\tilde{E})/(m+m\nu)$, $A_{23} = E(\nu+\tilde{\nu}^2 E/\tilde{E})/(m+m\nu)$, $A_{44} = \tilde{G}$ и $m = 1-\nu-2\tilde{\nu}^2 E/\tilde{E}$. Здесь \tilde{E} и E — модули Юнга для растяжения вдоль ρ и в ортогональном к нему направлении; \tilde{G} — модуль сдвига для диаметральной плоскости; $\tilde{\nu}$ и ν — коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение тела в направлениях θ и φ при растяжении вдоль радиальной координаты ρ , и поперечные деформации в плоскости, нормальной радиус-вектору ρ , при растяжении в той же самой плоскости.

При подстановке геометрических соотношений (1) в определяющие (3), а полученного результата — в уравнения равновесия (2) была получена неоднородная система дифференциальных уравнений Ламе второго порядка в частных производных.

Предполагалось, что на внешнюю и внутреннюю поверхности сферы действует распределенная нагрузка или заданы распределенные перемещения, симметричные относительно вертикальной диаметральной оси. Так как симметрия задачи не нарушена, то, компоненты вектора перемещения могут быть представлены в виде рядов по окружной $u_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\rho n}(\rho) P_n(\cos \theta)$, $u_\theta = -\sum_{n=0}^{\infty} u_{\theta n}(\rho) \partial_\theta P_n(\cos \theta)$ (4)

и радиальной $u_{\rho n} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i \rho^{i+z} \right)_n$, $u_{\theta n} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} y_i \rho^{i+z} \right)_n$ (5)

координате. Здесь $P_n(\cos \theta)$ — Полином Лежандра.

Подстановка (4) в неоднородную систему дифференциальных уравнений Ламе позволила перейти к n системам обыкновенных дифференциальных уравнений (однородных при $n=0$ и $n>1$, неоднородных при $n=1$), каждая из которых рассматривалась в виде самостоятельной задачи и решалась с использованием разложения (5).

Были получены аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных сфер:

$$u_\rho = u_{\rho 0} + u_{\rho 1} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} u_{\rho n} P_n(\cos \theta), \quad u_\theta = u_{\theta 1} \sin \theta - \sum_{n=2}^{\infty} u_{\theta n} \partial_\theta P_n(\cos \theta), \quad (6)$$

$$u_{\rho 0} = \rho^{-1/2-k} C_{10} + \rho^{-1/2+k} C_{20}, \quad u_{\theta 1} = C_{11} + C_{21}/\rho + C_{31} \rho^{-1/2+t} + C_{41} \rho^{-1/2-t} + H_\theta \rho^2$$

$$u_{\rho 1} = x_{11} C_{11} + x_{21} C_{21}/\rho + x_{31} C_{31} \rho^{-1/2+t} + x_{41} C_{41} \rho^{-1/2-t} + H_\rho \rho^2,$$

$$u_{\rho n} = x_{1n} C_{1n} \rho^{\lambda_{1n}} + x_{2n} C_{2n} \rho^{\lambda_{2n}} + x_{3n} C_{3n} \rho^{\lambda_{3n}} + x_{4n} C_{4n} \rho^{\lambda_{4n}},$$

$$u_{\theta n} = C_{1n} \rho^{\lambda_{1n}} + C_{2n} \rho^{\lambda_{2n}} + C_{3n} \rho^{\lambda_{3n}} + C_{4n} \rho^{\lambda_{4n}}.$$

Здесь

$$k = \sqrt{1/4 + 2(A_{22} + A_{23} - A_{12})/A_{11}},$$

$$H_\rho = (A_{22} + A_{23} - 2A_{12} - 2A_{44})\gamma H^{-1}, \quad H_\theta = (2A_{11} - A_{22} - A_{23} - 2A_{44})\gamma H^{-1},$$

$$H = 2[A_{11}(A_{22} + A_{23} - 4A_{44}) + 2A_{44}(A_{22} + A_{23} - 3A_{12}) - 2A_{12}^2],$$

$$t = \sqrt{9/4 + [2(A_{22} + A_{23} - A_{12}) + A_{11}(A_{22} + A_{23})/A_{44} - 2A_{12}(A_{12} + 2A_{44})/A_{44}]/A_{11}},$$

$$x_{11} = -1, \quad x_{31} = \frac{A_{44}[A_{12} - 2(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44} + 2(A_{12} + A_{44})t]}{2(A_{12} + A_{44})^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})},$$

$$x_{21} = \frac{A_{22} + A_{23} + 2A_{44}}{A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}}, \quad x_{41} = \frac{A_{44}[A_{12} - 2(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44} - 2(A_{12} + A_{44})t]}{2(A_{12} + A_{44})^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})}.$$

Характеристические числа z_{j_n} и коэффициенты x_{j_n} ($j=1,2,3,4$) для любого n могут быть найдены из уравнений:

$$[(i+z)(i+z-1) + \beta_{2n}(i+z) + \beta_{3n}][i(i+z-1) + \alpha_{2n}(i+z) + \alpha_{3n}] = [\alpha_{4n}(i+z) + \alpha_{5n}][\beta_{4n}(i+z) + \beta_{5n}],$$

$$x_{j_n} = \frac{\lambda_{j_n}(\lambda_{j_n} - 1 + \beta_{2n} - \alpha_{4n}) + \beta_{3n} - \alpha_{5n}}{\lambda_{j_n}(\lambda_{j_n} - 1 + \alpha_{2n} - \beta_{4n}) + \alpha_{3n} - \beta_{5n}},$$

где $\alpha_{sn} = a_{sn}/a_{1n}$, $\beta_{sn} = b_{sn}/b_{1n}$, $\lambda_{j_n} = i + z_{j_n}$, $a_{1n} = A_{11}$, $a_{2n} = 2A_{11}$,

$$a_{3n} = 2(A_{12} - A_{22} - A_{23}) - A_{44}(n^2 + n), \quad a_{4n} = (A_{12} + A_{44})(n^2 + n),$$

$$a_{5n} = (A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44})(n^2 + n), \quad b_{1n} = A_{44}, \quad b_{2n} = 2A_{44},$$

$$b_{3n} = -A_{23} - 2A_{44} - A_{22}(n^2 + n - 1), \quad b_{4n} = -(A_{12} + A_{44}), \quad b_{5n} = -(A_{22} + A_{23} + 2A_{44}).$$

Постоянные интегрирования C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} и C_{4n} определялись из граничных условий, допускающих разложение по полиномам Лежандра, для каждого n . Для $n > 1$ системы дифференциальных уравнений однородны. Поэтому, если граничные условия, разложенные в ряды по полиномам Лежандра для $n > 1$, были однородны, то решения систем уравнений были тривиальны: $u_{\rho_n} = 0$ и $u_{\theta_n} = 0$.

Последовательная подстановка (6) в геометрические (1) и определяющие соотношения (3), позволила записать выражения для деформаций и напряжений в точках

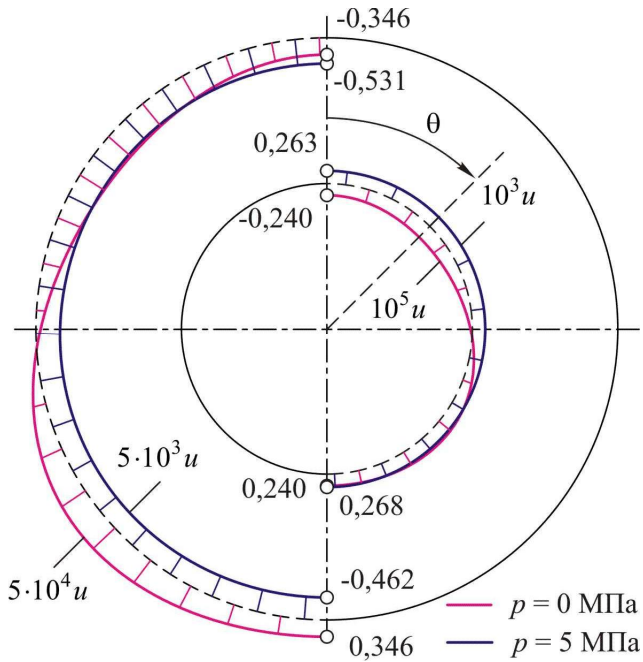


Рис.1 Перемещения (м) точек свободной поверхности ($\rho_1 = 3,0$ м, $\rho_2 = 6,0$ м).

«тяжелой» сферы, а из граничных условий $u_{\rho}|_{\rho=\rho_2} = 0$, $u_{\theta}|_{\rho=\rho_2} = 0$, $\sigma_{\rho\rho}|_{\rho=\rho_1} = -p$ и $\tau_{\rho\theta}|_{\rho=\rho_1} = 0$ или $u_{\rho}|_{\rho=\rho_1} = 0$, $u_{\theta}|_{\rho=\rho_1} = 0$, $\sigma_{\rho\rho}|_{\rho=\rho_2} = -p$ и $\tau_{\rho\theta}|_{\rho=\rho_2} = 0$ были определены все константы интегрирования, входящие в (6), и получены точные аналитические решения задач об упругом равновесии трансверсально-изотропных тяжелых сфер, нагруженных равномерным внутренним или внешним давлениями с закрепленной внешней или внутренней поверхностью соответственно.

На рис. 1 показано изменение сво-

бодных от закрепления поверхностей (внутренней – справа и внешней – слева) тяжелой мраморной ($\nu = 0,29$, $E = 55,0$ ГПа, $\tilde{\nu} = 0,32$, $\tilde{E} = 23,0$ ГПа, $\tilde{G} = 29,0$ ГПа и $\gamma = 2,7$ г/см³) сферы при заданных равномерных давлениях $p = 0$ МПа и $p = 5$ МПа.

Замена $\tilde{E} = E$, $\tilde{\nu} = \nu$, $\tilde{G} = G = E/[2(1 + \nu)]$, позволила записать выражения для перемещений, деформаций и напряжений в точках изотропной сферы, показавшие совпадение с точностью до коэффициентов с ранее полученными Л.Л. Кожевниковой, Г.Б. Кузнецовым, В.П. Матвеевко и И.Н. Шардаковым решениями.

В качестве примера использования полученных решений проведена оценка начальной прочности железобетонной крепи сферической горной выработки с использованием многокритериального подхода, развитого в работах В.Э. Вильдемана, Ю.В. Соколкина, А.А. Ташкинова и их учеников и позволяющего учесть различные механизмы разрушения анизотропных тел.

Во **второй главе** с помощью изложенного в главе 1 метода получены аналитические выражения для перемещений в задачах о равновесии трансверсально-изотропных составных «тяжелых» тел с центральной симметрией, находящихся под действием осесимметричных нагрузок. На сферической поверхности контакта, определяемой радиусом ρ_c , были заданы условия идеального сопряжения:

Записаны новые точные аналитические решения задач об упругом равновесии трансверсально-изотропных составных тяжелых сфер, нагруженных равномерным внутренним или внешним давлениями при жестком закреплении точек внешней или внутренней поверхности или задании условий идеального скольжения без трения. В частном случае для изотропных сфер полученные выражения совпали с точностью до коэффициентов с ранее полученным Г.Б. Кузнецовым решением.

Для демонстрации возможного использования полученных аналитических решений описано совместное деформирование монолитных крепей горных выработок и окружающего массива осадочных пород, определен вклад массовых сил в распределения инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях и проведена оценка начальной прочности по совокупности критериев.

На рис. 2 представлены распределения ненулевых инвариантов тензора напряжений $J^{(\bullet)}$ (в терминах Б.Е. Победри и Я. Рыхлевского) в железобетонной крепи ($E = 40,0$ ГПа, $\tilde{E} = 25,0$ ГПа, $\tilde{G} = 11$ ГПа, $\nu = 0,075$, $\tilde{\nu} = 0,15$ и $\gamma = 40$ кН/м³), окруженной массивом осадочных пород ($E = 55,0$ ГПа, $\tilde{E} = 23,0$ ГПа, $\tilde{G} = 29,0$ ГПа, $\nu = 0,29$, $\tilde{\nu} = 0,32$ и $\gamma = 27$ кН/м³) при внутреннем давлении $p = 0$ МПа вдоль меридиональной и обезразмеренной радиальной координаты $\tilde{\rho}$.

На внутренней поверхности ненулевым является только $J^I = (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta})/2$, который нелинейно распределен вдоль $\tilde{\rho}$, и имеет скачок на поверхности контакта (рис. 2). Обнаружено, что при заданных материальных константах существенное влияние на характер распределения J^I оказывает соотношение толщин частей рассматриваемого составного тела. В точках, принадлежащих вертикальной диаметральной оси, J^I и $J^{II} = \sigma_{\rho\rho}$ достигают наибольших значений, т.е. они наиболее опасны с точки зрения возможности начала разрушения крепи, по механизмам растяжения (сжатия) в окружном и радиальном направлении. Распределение $J^{IV} = \sqrt{\sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2}$ показало, что наиболее опасными с точки зрения начала разрушения крепи по механизму межслойного сдвига, являются точки горизонтальной диаметральной плоскости.

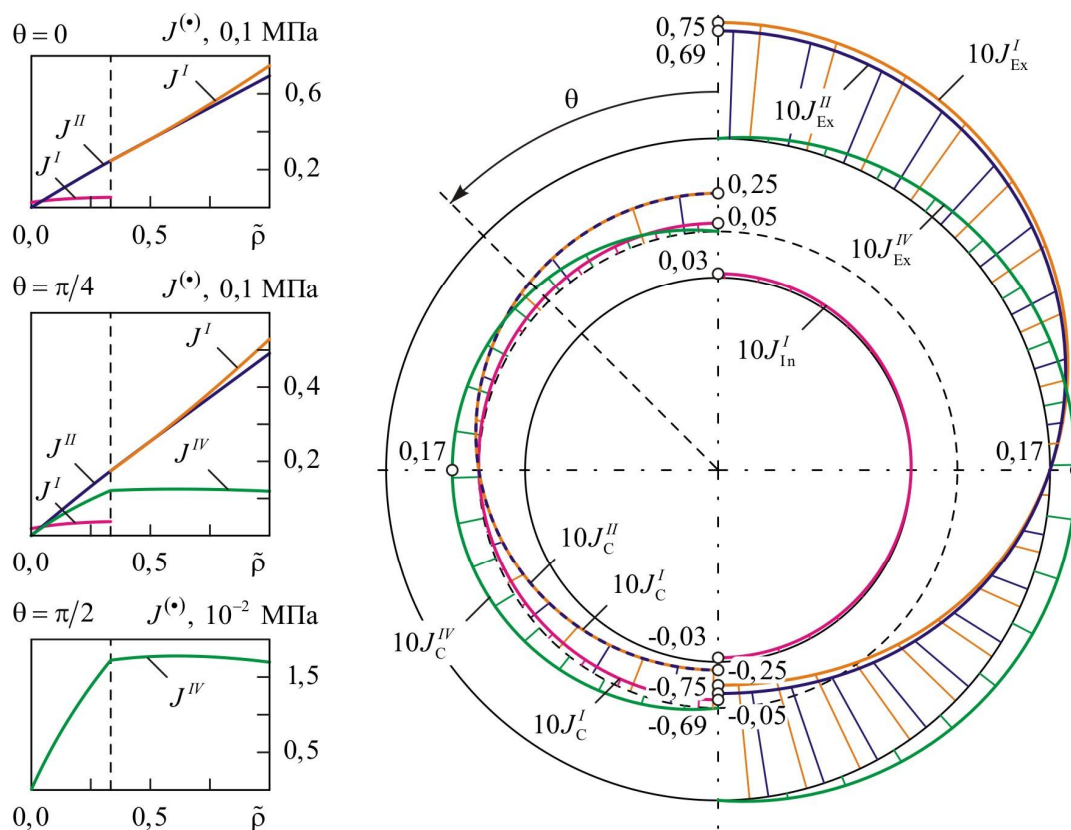


Рис. 2 Распределение инвариантов тензора напряжений (МПа) на закрепленной внешней (J_{Ex}^{\bullet}), свободной от нагрузок внутренней (J_{In}^{\bullet}) и контактной (J_C^{\bullet}) поверхностях ($\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$, $\rho_1 = 2,5$ м, $\rho_c = 3,1$ м, $\rho_2 = 4,3$ м)

Третья глава посвящена получению новых точных аналитических решений задач об упругом равновесии толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений, которые могут быть получены как частный случай приведенного в главе 2 решения, при условии возможности пренебречь массовыми силами.

Найденное решение позволило проанализировать влияние анизотропии материалов на характер распределения напряжений в сечениях составных центрально симметричных конструкций. На рис. 3 представлены распределения не нулевых инвариантов тензора напряжений $J_{\sigma}^{(\bullet)}$ в поперечных сечениях составных сфер, находящихся под действием внутреннего $p_1 = 1$ МПа и внешнего $p_2 = 5$ МПа равномерных давлений, вдоль обезразмеренной радиальной координаты $\tilde{\rho}$, в зависимости от показателя анизотропии материала внутренней и внешней частей. Деформационные свойства выбирались с учетом положительности собственных значений оператора упругости

$$A_{22}^{(\alpha)} - A_{23}^{(\alpha)} > 0, \quad \frac{1}{2} \left(A_{11}^{(\alpha)} + A_{22}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)} \pm \sqrt{8A_{12}^{(\alpha)2} + (A_{22}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)} - A_{11}^{(\alpha)})^2} \right) > 0$$

для трансверсально-изотропного тела, полученных Е.А. Митюшовым, С.А. Берестовой и Н.Ю. Одинцовой.

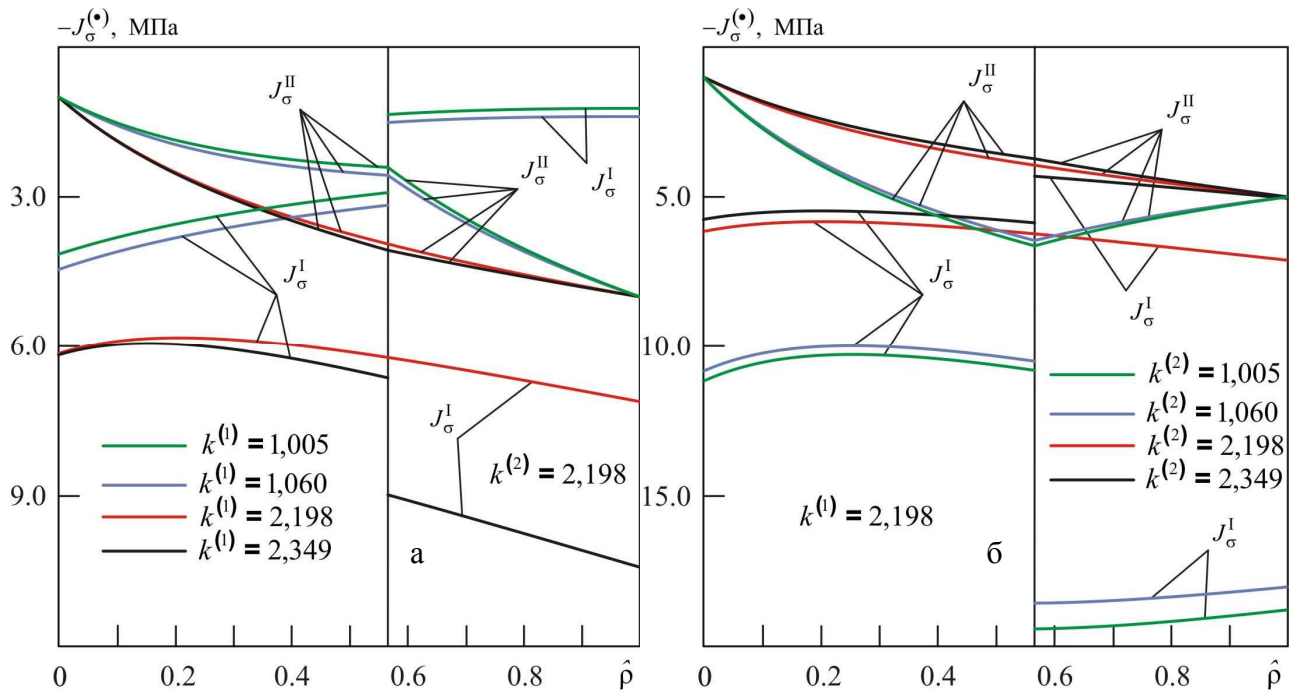


Рис. 3 Распределение инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях составных сфер в зависимости от показателя анизотропии материала внутренней (а) или внешней (б) части составной сферы при $\rho_1 = 3,0$ м, $\rho_c = 4,7$ м, $\rho_2 = 6,0$ м

Увеличение показателя анизотропии материала внутренней части составной сферы $k^{(1)}$, приводит к увеличению J^I и J^{II} , а увеличение $k^{(2)}$ снижает величину напряжений в составной сфере. Кроме того, соотношение между $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$ может качественно изменить характер распределения напряжений. С точки зрения оценки начальной прочности выявлено, что при заданных условиях нагружения разрушение от растяжения или сжатия в радиальном направлении может начаться в точках внешней

поверхности, либо если $k^{(1)} > k^{(2)}$, то на поверхности контакта. А опасными с точки зрения возможности начала разрушения от окружающих напряжений могут являться точки как внутренней, так и внешней и контактной поверхности, в зависимости от соотношения между $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$.

Одним из важных приложений полученных аналитических решений являются задачи прогнозирования эффективных упругих модулей дисперсно-упрочненного композита с анизотропными сферическими включениями в рамках полидисперсных моделей механики. Получены аналитические выражения для модуля объемного сжатия композита, трансверсально-изотропная матрица которого армирована сплошными или полыми трансверсально-изотропными сферическими включениями.

В качестве примера рассмотрен полимербетон с изотропной матрицей и трансверсально-изотропным наполнителем. Выведенные формулы для модуля объемного сжатия со сплошными

$$K_{\theta\phi}^* = \frac{4G_M c^3 (H_1 - 6K_M) + 3K_M (H_1 + 8G_M)}{3[H_1 + 8G_M - c^3 (H_1 - 6K_M)]}, \quad H_1 = 4A_{12}^{(I)} - A_{11}^{(I)} s^{(-)}, \quad s^{(\pm)} = (1 \pm 2k^{(I)}) \quad (7)$$

и полыми

$$K_{\theta\phi}^* = \frac{2H_3 [A_{12}^{(I)} H_4 - 6(c^3 - 1) K_M G_M] - A_{11}^{(I)} H_4 H_5}{3H_1 H_2 (c^3 - 1) (h^{2k^{(I)}} - 1) + 3H_3 (4G_M + 3c^3 K_M)}, \quad H_2 = A_{11}^{(I)} s^{(+)} - 4A_{12}^{(I)}, \quad (8)$$

$$H_3 = 2(H_1 h^{2k^{(I)}} + H_2), \quad H_4 = 4c^3 G_M + 3K_M, \quad H_5 = H_2 s^{(-)} + h^{2k^{(I)}} H_1 s^{(+)}$$

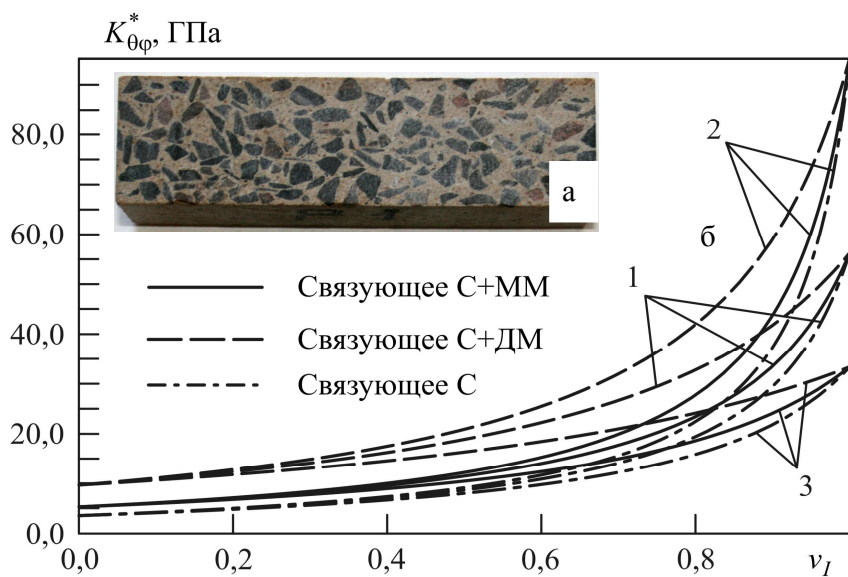


Рис. 4. Структура полимербетона (а), эффективные модули объемного сжатия полимербетонов, армированных диабазовыми (кривые 1), мраморными (кривые 2) или гранитными (кривые 3) сферами (б)

включениями содержат K_M и G_M — объемный и сдвиговой упругие модули матрицы, а $k^{(I)}$ — показатель анизотропии и коэффициенты $A_{11}^{(I)}$ и $A_{12}^{(I)}$ выражаются через упругие постоянные включений; c^3 — объемное наполнение композита, а $h = R_0/R_A$ — отношение радиуса полости к радиусу включения. Обратим внимание на то, что при

$R_0 \rightarrow 0$ (8) преобразуется к (7), а в случае изотропного материала включений результат совпадает с выражением, которое получил Z. Hashin.

На рис. 4(б) представлены эффективные объемные модули $K_{\theta\phi}^*$ композитов на основе различных связующих: «С» (смола Виналкид 550 без наполнителя), «С+ДМ» (Виналкид 550 с диабазовой мукой) и «С+ММ» (Виналкид 550 с мраморной мукой). Полученные зависимости позволяют сделать вывод о том, что для повышения модуля объемного сжатия необходимо отказаться от связующих без наполнителей, поскольку композит на их основе будет иметь наиболее низкие эффективные характеристики.

В **заключении** сформулированы основные выводы и перечислены наиболее важные результаты выполненных в работе исследований:

- Получены новые точные аналитические решения задач о равновесии полых и составных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил, внутреннего или внешнего давления, с жестко закрепленной внешней или внутренней поверхностью, а также при задании условий идеального скольжения без трения; Проанализирован вклад массовых сил в распределение независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях «тяжелой» сферы;

- Определены закономерности совместного влияния крепи сферической подземной выработки и окружающего массива осадочных пород, проведена оценка начальной прочности по совокупности критериев, учитывающих различные механизмы потери несущей способности трансверсально-изотропных материалов;

- Получено новое точное аналитическое решение задачи о равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием внешнего и внутреннего равномерных давлений; определены закономерности влияния анизотропии материала внутренней и внешней части сферы и величины технологического давления на распределение инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях, проведена многокритериальная оценка начальной прочности;

- В рамках полидисперсных моделей механики получены аналитические выражения для эффективных модулей объемного сжатия двухфазных дисперсно-упрочненных композитов, трансверсально-изотропная матрица которых содержит однородно распределенные трансверсально-изотропные сплошные или полые сферические включения. Проанализировано влияние состава полимерной матрицы и типа минерального наполнителя на эффективные деформационные свойства полимербетонов.

Основные публикации

1. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью //

Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. №5(21). С. 85-95. **Входит в перечень ВАК РФ.**

2. Фукалов А.А., Кутергин А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 - 4. С. 1831–1833. **Входит в перечень ВАК РФ.**

3. Зайцев А.В., Кислицын А.В., Кутергин А.В., Фукалов А.А. Распределение напряжений в поперечных сечениях контейнеров из стеклопластика и полимербетона, используемых для длительного хранения высокоагрессивных сред // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. Т. 14. № 4 – 5. С. 1230 - 1234. **Входит в перечень ВАК РФ.**

4. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Эффективные модули объемного сжатия дисперсно-упрочненных композитов со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями // Вестник ПНИПУ. Механика. 2010. № 4. С. 46–54.

5. Зайцев А.В., Соколкин Ю.В., Фукалов А.А. Механизмы начального разрушения железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 4. С. 59–74.

6. Зайцев А.В., Кутергин А.В., Фукалов А.А. Упругое равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых анизотропных тел с центральной и осевой симметрией // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Тр. II междунар. конф. Т. 1. – Ереван: ЕГУАС, 2010. – С. 249–253.

7. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. 2015. С. 3951-3953.

Подписано в печать _____.____.2016 года

Формат 60 x 90/16. Набор компьютерный.

Усл. печ. л.1. Тираж 100 экз. Заказ № _____.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии издательства

Пермского национального исследовательского политехнического университета.

Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29, к. 113.

Тел. (342) 219-80-33